



导学案

主编 肖德好

全品

学练考

高中数学

选择性必修第三册 RJA

细分课时

分层设计

落实基础

突出重点

天津出版传媒集团
天津人民出版社

目录 Contents

06 第六章 计数原理

PART SIX

6.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理	导 107
第1课时 分类加法计数原理与分步乘法计数原理	导 107
第2课时 分类加法计数原理与分步乘法计数原理的简单应用	导 109
6.2 排列与组合	导 111
6.2.1 排列	导 111
6.2.2 排列数	导 112
6.2.3 组合	导 115
6.2.4 组合数	导 116
微突破 常见的排列组合问题解题策略	导 120
6.3 二项式定理	导 123
6.3.1 二项式定理	导 123
6.3.2 二项式系数的性质	导 125
① 本章总结提升	导 128
数学探究 杨辉三角的性质与应用	导 130

07 第七章 随机变量及其分布

PART SEVEN

7.1 条件概率与全概率公式	导 133
7.1.1 条件概率	导 133
第1课时 条件概率与乘法公式	导 133
第2课时 条件概率的性质及应用	导 135
7.1.2 全概率公式	导 136
7.2 离散型随机变量及其分布列	导 139
7.3 离散型随机变量的数字特征	导 142
7.3.1 离散型随机变量的均值	导 142
7.3.2 离散型随机变量的方差	导 144
7.4 二项分布与超几何分布	导 147
7.4.1 二项分布	导 147
第1课时 二项分布	导 147
第2课时 二项分布的综合问题	导 149
7.4.2 超几何分布	导 151
7.5 正态分布	导 155
① 本章总结提升	导 158

08 第八章 成对数据的统计分析

PART EIGHT

8.1 成对数据的统计相关性	导 163
8.2 一元线性回归模型及其应用	导 167
第1课时 一元线性回归模型及最小二乘估计	导 167
第2课时 非线性回归模型	导 169
8.3 列联表与独立性检验	导 171
① 本章总结提升	导 174
数学建模 建立统计模型进行预测	导 179

◆ 参考答案

导 181

6.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理

第1课时 分类加法计数原理与分步乘法计数原理

【学习目标】

1. 通过实例,能归纳总结出分类加法计数原理、分步乘法计数原理.
2. 正确地理解“完成一件事情”的含义,能根据具体问题的特征,选择“分类”或“分步”.
3. 能根据具体问题的特征,选择两种计数原理解决一些实际问题,发展数学建模和数学运算的核心素养.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 分类加法计数原理

定义:完成一件事有_____不同方案,在第1类方案中有_____种不同的方法,在第2类方案中有_____种不同的方法,那么完成这件事共有 $N =$ _____种不同的方法.

如果完成一件事情有 n 类不同方案,在第 k 类中有 a_k 种不同的方法,那么完成这件事共有 $N =$ _____种不同的方法.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)在分类加法计数原理中,两类不同方案中的方法可以相同. ()

(2)在分类加法计数原理中,每类方案中的方法都能完成这件事. ()

◆ 知识点二 分步乘法计数原理

定义:完成一件事需要_____步骤,做第1步有_____种不同的方法,做第2步有_____种不同的方法,那么完成这件事共有 $N =$ _____种不同的方法.

如果完成一件事情需要 n 个步骤,做第 k 步有 a_k 种不同的方法,那么完成这件事共有 $N =$ _____种不同的方法.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)在分步乘法计数原理中,每个步骤中完成这个步骤的方法是各不相同的. ()

(2)在分步乘法计数原理中,事情如果是分两步完成的,那么其中任何一个单独的步骤都不能完成这件事,只有两个步骤都完成后,这件事情才算完成. ()

课 中 探 究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 分类加法计数原理

例1 (1)一个科技小组有4名男同学,6名女同学,从中任选1名同学参加学科竞赛,不同的选派方法共有_____种.

(2)在所有的两位数中,个位数字大于十位数字的两位数的个数为_____.

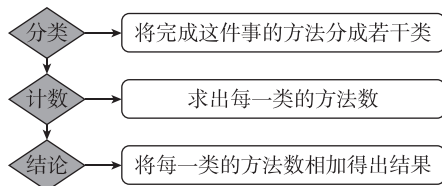
变式 某市的有线电视可以接收中央台12个频道、本地台10个频道和其他省市46个频道的节目.

(1)当这些频道播放的节目互不相同时,一台电视机共可以选看多少个不同的节目?

(2)如果有3个频道正在转播同一场球赛,其余频道正在播放互不相同的节目,一台电视机共可以选看多少个不同的节目?

[素养小结]

利用分类加法计数原理计数时的解题流程



【提醒】确定分类标准时要确保每一类都能独立地完成这件事.

◆ 探究点二 分步乘法计数原理

- 例 2** (1)有 7 本不同的书,从中选 3 本送给 3 名同学,每人各 1 本,共有多少种不同的送法?
(2)有 7 种不同的书(每种不少于 3 本),要买 3 本送给 3 名同学,每人各 1 本,共有多少种不同的送法?

变式 (1)若 4 名学生报名参加数学、计算机、航模兴趣小组,每人选报 1 项,则不同的报名方式有

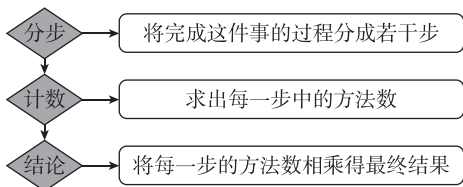
()

- A. 3^4 种 B. 4^3 种
C. $3 \times 2 \times 1$ 种 D. $4 \times 3 \times 7$ 种

(2)人们习惯把最后一位是 6 的多位数叫作“吉祥数”,则无重复数字的四位“吉祥数”(首位不能是零)共有 _____ 个.

[素养小结]

利用分步乘法计数原理计数时的解题流程



[提醒] (1)要按照事件发生的过程合理分步.

(2)分步时要注意各步骤互相依存,不能遗漏步骤,只有各步骤都完成才算完成这件事.

◆ 探究点三 两个计数原理的简单综合应用

例 3 现有 10 本不同的数学书,9 本不同的语文书,8 本不同的英语书,从中任取 2 本不同学科的书,共有多少种不同的取法?

变式 某公园休息处东面有 8 个空闲的凳子,西面有 6 个空闲的凳子,小明与爸爸来这里休息.

- (1)若小明爸爸任选一个凳子坐下(小明不坐),有多少种不同的坐法?
(2)若小明与爸爸分别就座,有多少种不同的坐法?

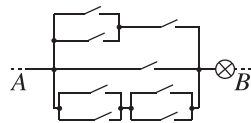
[素养小结]

利用两个计数原理解题时的三个注意点

- (1)当题目无从下手时,可考虑要完成的这件事是什么,即怎样做才算完成这件事,然后给出完成这件事的一种或几种方法,从这几种方法中归纳出解题方法.
(2)分类时标准要明确,做到不重不漏,有时要恰当画出示意图或树状图,使问题的分析更直观、清楚,便于探索规律.
(3)综合问题一般是先分类再分步.

拓展 某电路图如图所示.

- (1)该电路从 A 到 B 只有一条支路接通,共有多少条不同的路径?
(2)合上两个开关接通电路,有多少种不同的方法?



第2课时 分类加法计数原理与分步乘法计数原理的简单应用

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点 两个计数原理的联系与区别

	分类加法计数原理	分步乘法计数原理
联系	都是解决求完成一件事不同的_____问题,都是对复杂事件的_____	
区别	完成一件事情,共有 n 类方法,关键是“分类”	完成一件事情,共有 n 个步骤,关键是“分步”
	各类方法相互独立	各个步骤中的方法相互依存
	任何一类方法_____这件事	各个步骤都完成_____这件事
	可利用“_____”电路来理解	可利用“_____”电路来理解

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)某校高一年级共8个班,高二年级共6个班,从中选一个班级承担星期一早晨的升旗任务,安排方法共有14种. ()

(2)在一次运动会上有四项比赛,冠军均在甲、乙、丙三人中产生,那么不同的夺冠情况共有 4^3 种. ()

(3)十字路口来往的车辆,若不允许回头,则共有4种行车路线. ()

(4)有三只口袋装有小球,一只装有5个不同的白色小球,一只装有6个不同的黑色小球,一只装有7个不同的红色小球,若每次从中取2个不同颜色的小球,则共有36种不同的取法. ()

课 中 探 究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 数字组数问题

例1 用0,1,2,3,⋯,9这十个数字.

- (1)可组成多少个三位数?
- (2)可组成多少个无重复数字的三位数?
- (3)可组成多少个小于500且没有重复数字的自然数?

变式 (1)用0,1,2,3,4五个数字可以组成多少个无重复数字且比2000大的四位奇数?

(2)用0,1,2,3,4五个数字可以组成多少个无重复数字且能被3整除的四位数?

[素养小结]

解决组数问题的方法

(1)对于组数问题,一般按特殊位置(一般是末位和首位)优先的方法分类或分步完成;如果正面分类较多,可采用间接法从反面求解.

(2)解决组数问题,应特别注意其限制条件,有些条件是隐藏的,要善于挖掘.组数时,要注意特殊元素、特殊位置优先的原则.

[提醒] 数字“0”不能排在两位数字或两位数字以上的数的最高位.

◆ 探究点二 选(抽)取与分配问题

例2 现有5幅不同的国画,2幅不同的油画,7幅不同的水彩画.

- (1)从中任选一幅画布置房间,有多少种不同的选法?
- (2)从国画、油画、水彩画中各选一幅布置房间,有多少种不同的选法?
- (3)从这些画中选出两幅不同种类的画布置房间,有多少种不同的选法?

(4)要从甲、乙、丙 3 幅不同的画中选出 2 幅,分别挂在左、右两边墙上的指定位置,问共有多少种不同的挂法?

变式 (1)现有天平及重量为 1,2,4 的砝码各一个,每一步,我们选取任意一个砝码,将其放入天平的左边或者右边,直至所有砝码全部放到天平两边,但在放的过程中发现天平的指针不会偏向分度盘的右边,则不同顺序的放法共有 ()

- A. 15 种 B. 13 种
C. 11 种 D. 10 种

(2)高三年级的三个班级到甲、乙、丙、丁四个工厂进行社会实践,其中甲工厂必须有班级去,则不同的分配方案共有 ()

- A. 16 种 B. 18 种
C. 37 种 D. 48 种

[素养小结]

解决抽取(分配)问题的方法

(1)当涉及对象数目不大时,一般选用枚举法、树状图法、框图法或者图表法.

(2)当涉及对象数目较大时,一般有两种方法:

①直接使用分类加法计数原理或分步乘法计数原理.一般地,若抽取是有顺序的,则按分步进行;若按对象特征抽取,则按分类进行.

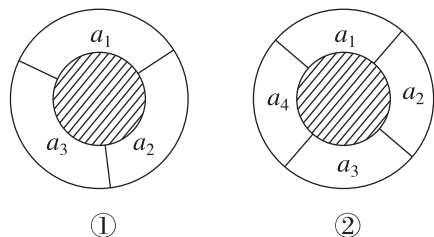
②间接法:去掉限制条件计算所有的抽取方法数,然后减去所有不符合条件的抽取方法数即可.

◆ 探究点三 涂色与种植问题

例 3 一个同心圆形花坛分为两部分,中间小圆部分种植草坪和绿色灌木,周围的圆环分为 $n(n \geq 3, n \in \mathbf{N}^*)$ 等份,种植红、黄、蓝三种颜色不同的花,要求相邻两部分种植不同颜色的花.

(1)如图①,圆环分成 3 等份,分别为 a_1, a_2, a_3 ,则有多少种不同的种植方法?

(2)如图②,圆环分成 4 等份,分别为 a_1, a_2, a_3, a_4 ,则有多少种不同的种植方法?

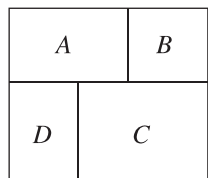


变式 (1)用 4 种不同的颜色涂在四棱锥的各个面上,要求相邻两面不同色,有 _____ 种不同的涂法.

(2)用 4 种不同的颜色给图中的 A, B, C, D 四个区域涂色,要求每个区域只能涂一种颜色.

①有多少种不同的涂法?

②若相邻区域不能涂同一种颜色,则有多少种不同的涂法?



[素养小结]

求解涂色(种植)问题一般是直接利用两个计数原理求解,常用方法有:

(1)按区域的不同以区域为主分步计数,用分步乘法计数原理分析;

(2)以颜色(种植作物)为主分类讨论,适用于“区域、点、线段”问题,用分类加法计数原理分析;

(3)对于空间中的涂色问题,将空间问题平面化,转化为平面区域涂色问题.

6.2 排列与组合

6.2.1 排列

【学习目标】

理解排列的概念,能正确写出一些简单问题的所有排列.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点 排列

(1)排列的定义:一般地,从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素,并按照 _____ 排成一列,叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

(2)两个排列相同的充要条件:两个排列的 _____ 完全相同,且元素的 _____ 也相同.

注意:(1) m 个元素是不同的.

(2)定义中排列有两个步骤:第一步先取出 m 个元素,第二步再按照一定的顺序排成一列.这与后面的组合是有联系的.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)1,2,3 与 3,2,1 为同一排列. ()

(2)在一个排列中,同一个元素不能重复出现. ()

(3)从 1,2,3,4 中任选两个数字,就组成一个排列. ()

(4)从 5 名同学中任选 2 名同学分别参加数学和物理竞赛的所有不同的选法是一个排列问题. ()

课 中 探 究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 排列的概念

【探索】判断一个具体问题是否为排列问题的关键是什么?

例 1 判断下列问题是否是排列问题,并说明理由.

(1)从 1,2,3,4 四个数字中,任选两个做加法,其结果有多少种不同的可能?

(2)从 1 到 10 这十个自然数中任取两个不同的数组成直角坐标平面内的点的坐标,可得到多少个不同的点的坐标?

(3)从十名同学中任选两名同学去学校开座谈会,有多少种不同的选取方法?

(4)某商场有四个大门,若从一个大门进去,购买物品后,再从另一个大门出来,不同的出入方式有多少种?

变式 (多选题)下列问题中,属于排列问题的有 ()

- A. 从甲、乙、丙三名同学中选出两名分别担任正、副班长,共有多少种不同的选取方法
- B. 从甲、乙、丙三名同学中选出两名同学参加志愿者活动,共有多少种不同的选取方法
- C. 平面上有五个点,任意三点不共线,这五个点最多可确定多少条直线
- D. 从 1,2,3,4 四个数字中任选两个组成一个两位数,共有多少个不同的两位数

【素养小结】

判断一个具体问题是否为排列问题,就看安排取出的元素时是有序的还是无序的,而检验它是否有序的依据就是变换元素的“位置”(这里的“位置”应视具体问题的性质和条件来决定),看其结果是否有变化,有变化就是排列问题,无变化就不是排列问题.

◆ 探究点二 简单的排列问题

例 2 (1) 从 1, 2, 3, 4 四个数字中任取两个数字组成没有重复数字的两位数, 一共可以组成多少个?

(2) 从 0, 1, 2, 3 四个数字中任取三个数字组成没有重复数字的三位数, 一共可以组成多少个?

(3) 从语文书、数学书、英语书、物理书 4 本书中任意取出 3 本分给甲、乙、丙三人, 每人一本, 试将所有的不同分法列举出来.

变式 (1) 从 6 名同学中选出正、副组长各 1 名, 不同的选法有 ()

- A. 11 种 B. 15 种
C. 30 种 D. 36 种

(2) 若把英语单词“word”的字母顺序写错了, 则可能出现的错误共有 _____ 种.

[素养小结]

利用树状图法解决简单排列问题的适用范围及策略

(1) 适用范围: 树状图在解决排列元素个数不多的问题时, 是一种比较有效的表示方式.

(2) 策略: 在操作中先将元素按一定顺序排出, 然后以先安排哪个元素为分类标准进行分类, 再安排第二个元素, 并按此元素分类, 依次进行, 直到完成一个排列, 这样能做到不重不漏, 然后再按树状图写出排列.

拓展 写出 A, B, C, D 四名同学站成一排照相, A 不站在两端的所有可能站法.

◆ 探究点三 实际中的简单排列问题

例 3 上午要上语文、数学、体育和外语四门课, 数学老师不能上第二节和第四节, 则不同的排课方案的种数是 ()

- A. 24 B. 22
C. 20 D. 12

变式 甲、乙、丙、丁 4 名同学和 1 名老师站成一排合影留念, 要求老师必须站在中间, 则有 _____ 种不同的站法.

[素养小结]

解决简单的排列实际应用问题的策略

- (1) 首先明确要研究的元素是什么, 有无顺序.
(2) 在处理该问题时是需要分类完成还是分步完成.

6.2.2 排列数

【学习目标】

1. 理解排列数公式, 能利用排列数公式进行计算和证明.
2. 进一步理解排列的概念, 掌握一些排列问题的常用解决方法.
3. 能应用排列知识解决简单的实际问题.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点 排列数与排列数公式

排列数定义及表示	把从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素的所有 _____, 叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数, 用符号 A_n^m 表示
全排列的概念	把 n 个不同的元素 _____ 的一个排列

(续表)

阶乘的概念	正整数 1 到 n 的连乘积, 叫作 n 的阶乘, 用 $n!$ 表示
排列数公式	$A_n^m =$ _____ 阶乘式 $A_n^m =$ _____ ($n, m \in \mathbf{N}^+, m \leq n$)
特殊情况	$A_n^n =$ _____, $1! =$ _____, $0! =$ _____

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)从 $n(n \geq 2)$ 个人中选出 2 个人,分别从事两项不同的工作,可以用 A_n^2 表示. ()

(2)集合 $P = \{x | x = A_4^m, m \in \mathbf{N}^*\}$, 则 m 的取值个数是 4. ()

(3)将 8 名同学排成两排,每排 4 人,则不可以用 A_8^8 表示. ()

(4) $n! = \frac{(n+1)!}{n+1}$. ()

(5) $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$. ()

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 排列数公式的计算

角度一 直接利用排列数公式求值

例 1 计算:(1) A_{10}^4 ; (2) $A_9^4 - A_9^3$; (3) $\frac{A_{12}^8}{A_{12}^7}$.

变式 $\frac{2A_8^5 + 7A_8^4}{A_8^8 - A_9^5} = \underline{\hspace{2cm}}$.

角度二 排列数的化简与证明

例 2 (1)满足 $3A_x^3 = 2A_{x+1}^2 + 6A_x^2$ 的 x 的值为 .

(2)化简: $1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \times n! = \underline{\hspace{2cm}}$.

变式 (1)解方程: $A_{2n}^3 = 28A_n^2$.

(2)求证: $A_{n+1}^{n+1} - A_n^n = n^2 A_{n-1}^{n-1}$.

[素养小结]

1. 排列数的计算方法

(1)排列数的计算主要是利用排列数的乘积公式进行,连续正整数的积可以写成某个排列数;

(2)应用排列数公式的阶乘形式时,一般写出它们的式子后,再提取公因式.

2. 排列数的化简与证明技巧

应用排列数公式可以对含有排列数的式子进行化简和证明,化简的过程中要对排列数进行变形,并要熟悉排列数之间的内在联系.解题时要灵活地运用如下变式:

① $n! = n(n-1)!$; ② $A_n^m = nA_{n-1}^{m-1}$;

③ $n \cdot n! = (n+1)! - n!$; ④ $\frac{n-1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$.

[提醒] 在解含有排列数的方程或不等式时,必须注意 A_n^m 中 $m \in \mathbf{N}^*$, $n \in \mathbf{N}^*$ 且 $m \leq n$ 这些限制条件.在解出方程或不等式后,要进行检验,把不合题意的解舍掉.

◆ 探究点二 排数问题

[探索] 排数问题的特点是什么? 解题时怎样分析?

例 3 用 0,1,2,3,4 五个数字.

(1)可组成多少个五位数?

(2)可组成多少个无重复数字的五位数?

(3)可组成多少个无重复数字且是 3 的倍数的三位数?

(4)可组成多少个无重复数字的五位奇数?

(5)组成没有重复数字的五位数,将这些数由小到大排列,42 130 是第几个数?

变式 (1)用数字 1,2,3,4 组成没有重复数字的三位数,其中奇数的个数为 ()

- A. 6 B. 12 C. 16 D. 18

(2)用 0,1,2,3,4,5 这六个数字能组成多少个无重复数字且能被 5 整除的五位数?

[素养小结]

数字排列问题的解题原则

排列问题的本质是“元素”占“位子”问题,有限制条件的排列问题的限制条件主要表现在某元素不排在某个位子上,或某个位子不排某些元素.解决该类排列问题的方法主要是按“优先”原则,即优先排特殊元素或优先满足特殊位子,当一个位子安排的元素影响到另一个位子的元素个数时,应分类讨论.

[提醒] 解决数字问题时,应注意题干中的限制条件,恰当地进行分类和分步,尤其注意特殊元素“0”的处理.

◆ 探究点三 排队问题

[探索] 排队问题的特点是什么?解题时怎样分析?

例 4 3 名男生和 4 名女生按照不同的要求排队,求不同的排队方法数.

- (1)选 5 人排成一排;
- (2)全体站成一排,甲、乙均不在两端;
- (3)全体站成一排,甲不在最左端,乙不在最右端;
- (4)全体站成一排,男生站在一起、女生站在一起;
- (5)全体站成一排,男生彼此不相邻;
- (6)全体站成一排,男生各不相邻、女生各不相邻;
- (7)全体站成一排,甲、乙中间有 2 个人;
- (8)排成前后两排,前排 3 人,后排 4 人.

变式 把 5 件不同产品 A, B, C, D, E 摆成一排.

(1)若 A, B 相邻且 A, C 相邻,则共有多少种不同的摆法?

(2)若 A, B 相邻且 A, C 不相邻,则共有多少种不同的摆法?

[素养小结]

排队问题的解题策略

(1)合理归类,要将题目大致归类,常见的类型有特殊元素、特殊位置、相邻问题、不相邻问题等,再针对每一类采用相应的方法解题.

(2)恰当结合,排列问题的解决离不开两个计数原理的应用,解题过程中要恰当结合两个计数原理.

(3)正难则反,这是一个基本的数学思想,巧妙应用排除法可起到事半功倍的效果.

拓展 某班级某天的课程表要排入历史、语文、数学、物理、体育、英语共 6 节课.

(1) 如果数学必须比语文先上, 那么不同的排法有多少种?

(2) 原定的 6 节课已排好, 学校临时通知要增加生物、化学、地理 3 节课, 若将这 3 节课插入原课表中且原来的 6 节课相对顺序不变, 则有多少种不同的排法?

6.2.3 组合

【学习目标】

1. 理解组合的意义.
2. 学会运用组合的概念, 分析简单的实际问题.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点 组合

1. 组合的定义: 一般地, 从 _____ 个不同元素中取出 _____ ($m \leq n$) 个元素 _____, 叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合.

2. 排列与组合的异同点:

	排列	组合
相同点	从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素	
不同点	与元素的顺序 _____	与元素的顺序 _____

【诊断分析】 1. 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1) 两个组合相同的充要条件是其中的元素完全相同. ()

(2) 从 a, b, c 三个不同的元素中任取两个元素的一个组合是 a, b 或 a, c 或 b, c . ()

(3) “从甲、乙、丙 3 名同学中选出 2 名去参加某两个乡镇的社会调查, 有多少种不同的选法”是组合问题. ()

(4) “现将 4 枚相同的抗战胜利纪念币送给 10 人中的 4 人留念, 有多少种送法”是排列问题. ()

2. “ abc ”与“ bca ”是相同的排列吗? 它们是相同的组合吗?

课 中 探 究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 组合的概念

例 1 判断下列问题是排列问题, 还是组合问题.

- (1) 把 5 本不同的书分给 5 个学生, 每人 1 本;
- (2) 从 7 本不同的书中取出 5 本给某个同学;
- (3) 10 个人相互写一封信, 求共写了几封信.

变式 (多选题) 下列问题中, 属于组合问题的是

()

- A. 7 支战队以单循环进行比赛(每两队比赛一次), 共进行多少次比赛
- B. 7 支战队以单循环进行比赛, 这次比赛的第一、二名获得者有多少种可能
- C. 从 7 名员工中选出 3 名参加同一种娱乐活动, 有多少种选派方法
- D. 从 7 名员工中选出 3 名分别参加不同的娱乐活动, 有多少种选派方法

[素养小结]

区分排列与组合的方法

首先弄清楚事件是什么,区分的标志是有无顺序,而区分有无顺序的方法是:把问题的一个选择结果写出来,然后交换这个结果中任意两个元素的位置,看是否会产生新的变化,若有新变化,则说明有顺序,是排列问题;若无新变化,则说明无顺序,是组合问题.

◆ 探究点二 简单的组合问题

例 2 (1)从 5 个不同的元素 a, b, c, d, e 中取出 2 个,写出所有不同的组合,共有多少个?

(2)从 4 个不同元素 a, b, c, d 中任取 3 个元素,写出所有不同的组合,共有多少个?

变式 平面内有 A, B, C, D 四个不同的点,其中任意三个点不共线.

- (1)试写出以其中任意两个点为端点的有向线段;
- (2)试写出以其中任意两个点为端点的线段;
- (3)试写出以其中任意三个点为顶点的三角形.

[素养小结]

写出有关问题的组合的方法

(1)利用列举的方法从 n 个不同元素中选出 m 个元素的所有组合,如“顺序后移法”或“树状图法”,可直观地写出组合,做到不重不漏.

(2)由于组合与顺序无关,故利用“顺序后移法”时箭头向后逐步推进,且写出的一个组合不可交换位置.如写出 ab 后,不必再交换位置为 ba ,因为它们是同一组合.画“树状图”时,应注意顶层及下枝的排列思路,防止重复或遗漏.

6.2.4 组合数

【学习目标】

1. 理解组合数的概念.
2. 会推导组合数公式,并会应用公式求值.
3. 理解组合数的两个性质,并会求值、化简和证明.
4. 能解决有限制条件的组合问题.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点 组合数与组合数公式

组合数定义	从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素的 _____ 的个数,叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数
-------	---

(续表)

表示法	_____	
组合数公式	乘积式	$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-m+1)}{m!}$
	阶乘式	$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$
性质	$C_n^m = C_n^{n-m}$, $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$	
备注	① $n, m \in \mathbf{N}^*$ 且 $m \leq n$; ② 规定: $C_n^0 = 1$	

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)从 a, b, c 三个不同的元素中任取两个元素的一个组合是 C_3^2 . ()

(2) $C_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$. ()

(3)从 1, 3, 5, 7 中任取两个数相乘可得 C_4^2 个积. ()

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 组合数公式及其应用

角度一 组合数的计算与化简

例 1 (1)计算: $C_{10}^4 - C_7^3 \cdot A_3^3$.

(2)计算: $C_{3n}^{38-n} + C_{21+n}^{3n}$.

(3)计算: $C_3^3 + C_4^3 + \dots + C_{10}^3$.

角度二 组合数有关的证明

例 2 证明: (1) $mC_n^m = nC_{n-1}^{m-1}$;

(2) $C_{m+2}^n = C_m^n + 2C_m^{n-1} + C_m^{n-2}$.

变式 (1)求使 $3C_{x-3}^{x-7} = 5A_{x-4}^2$ 成立的 x 的值.

(2)证明: $C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = C_n^m \cdot C_m^k$.

(3)若 $\begin{cases} C_8^r \cdot 2^r \geq C_8^{r+1} \cdot 2^{r+1}, \\ C_8^r \cdot 2^r \geq C_8^{r-1} \cdot 2^{r-1}, \end{cases}$ 求 r 满足的条件.

[素养小结]

进行组合数的相关计算时,注意以下几点:

(1)像排列数公式一样,公式 $C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$ 一般用于计算;而公式

$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ 及 $C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m}$ 一般用于证明、解方程

(不等式)等.

(2)要注意公式 $C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m}$ 的逆向运用,如例 1(1)中可利用“ $C_7^3 A_3^3 = A_7^3$ ”简化计算过程.

(3)在解决与组合数有关的问题时,要注意隐含条件“ $m \leq n$ 且 $m, n \in \mathbf{N}^*$ ”的运用.

(4)例 2(1)所推导的结论“ $mC_n^m = nC_{n-1}^{m-1}$ ”以及它的变形公式是非常重要的公式,应熟练掌握.

◆ 探究点二 有限制条件的组合问题

考向 1 “含有”与“至少”问题

例 3 有男运动员 6 名,女运动员 4 名,其中男、女队长各 1 名.选派 5 人外出比赛,按下列要求分别有多少种选法?

(1)男运动员 3 名,女运动员 2 名;

(2)至少有 1 名女运动员;

(3)至少有 1 名队长;

(4)既有队长,又有女运动员.

变式 蓝天救援队有男救援员 8 名,女救援员 4 名,现选派 5 名救援员参加一项救援.

(1)若男救援员甲与女救援员乙必须参加,共有多少种不同的选法?

(2)若救援员甲、乙均不能参加,共有多少种不同的选法?

(3)若至少有一名男救援员和一名女救援员参加,共有多少种不同的选法?

[素养小结]

组合问题常有以下两类题型:

(1)“含有”或“不含有”某些元素的组合题型:“含”,则先将这些元素取出,再由其他元素补足;“不含”,则先将这些元素剔除,再从剩下的元素中选取.

(2)“至少”或“至多”含有几个元素的题型:当直接法分类复杂时,逆向思维,间接求解.

考向 2 “多面手”问题

例 4 有 11 名外语翻译人员,其中 5 名英语翻译员,4 名日语翻译员,另外 2 名英语、日语都精通,从中找出 8 人,使他们可以组成 2 个翻译小组,其中一组 4 人翻译英语,另外一组 4 人翻译日语,且这 2 个小组能同时工作,则这样的 8 人名单共有多少种?

变式 有 6 名工人,其中 2 人只会电工,3 人只会木工,还有 1 人既会电工又会木工,若要选出电工 2 人、木工 2 人,且这 4 人能同时工作,则共有 _____ 种不同的选法.

[素养小结]

多面手问题以元素作为分析对象,按照选用几个多面手,多面手做什么建立分类讨论的标准,并且要注意做到不重复不遗漏.

◆ 探究点三 分组、分配问题

[探索] (1)把 3 个苹果平均分成三份共有几种分法?为什么?

(2)把 3 本不同的书分给 3 个人,共有几种分法?

考向 1 不同元素分组、分配问题

例 5 按下列要求分配 6 本不同的书,分别有多少种不同的分配方法?

(1)分成 3 份,1 份 1 本,1 份 2 本,1 份 3 本;

(2)甲、乙、丙三人中,一人得 1 本,一人得 2 本,一人得 3 本;

(3)平均分成 3 份,每份 2 本;

(4)平均分配给甲、乙、丙三人,每人 2 本;

(5)分成 3 份,1 份 4 本,另外 2 份每份 1 本;

(6)甲、乙、丙三人中,一人得 4 本,另外两人每人得 1 本;

(7)甲得 1 本,乙得 1 本,丙得 4 本.

变式 有 9 件不同的玩具,求符合下列条件的分配方案的种数.

- (1) 平均分成三堆;
- (2) 按数量分为 2,2,2,3 四堆;
- (3) 分给甲、乙、丙三个人,甲得 2 件,乙得 3 件,丙得 4 件;
- (4) 分给甲、乙、丙三个人,一人得 2 件,一人得 3 件,一人得 4 件.

考向 2 相同元素分组、分配问题

例 6 6 个相同的小球放入 4 个编号为 1,2,3,4 的盒子中,求下列问题中不同放法的种数.

- (1) 每个盒子都不空;
- (2) 恰有 1 个空盒子;
- (3) 恰有 2 个空盒子.

变式 某校准备参加高中数学联赛,把 16 个选手名额分配到高三年级的 1,2,3,4 四个班,每班至少 1 个名额.

- (1) 不同的分配方案共有多少种?
- (2) 若每班名额不少于该班的序号数,则不同的分配方案共有多少种?

[素养小结]

(1) 分组问题属于“组合”问题,常见的分组问题有三种:

- ① 完全均匀分组,每组的元素个数均相等.
- ② 部分均匀分组,应注意不要重复,有 n 组均匀,最后必须除以 $n!$.
- ③ 完全非均匀分组,这种分组不考虑重复现象.

(2) 相同元素分配问题的处理策略

① 隔板法:将放有小球的盒子紧挨着成一行放置,便可看作排成一行的小球的空隙中插入了若干隔板,相邻两块隔板形成一个“盒”.每一种插入隔板的方法对应着小球放入盒子的一种方法,此法称为隔板法.隔板法专门解决相同元素的分配问题.

② 将 n 个相同的元素分给 m 个不同的对象($n \geq m$),每个对象至少分得一个元素,有 C_{n-1}^{m-1} 种方法.可描述为 $n-1$ 个空中插入 $m-1$ 块板.

微突破 常见的排列组合问题解题策略

知识梳理

知识导学 素养初识

知识归纳

(1) 解决排列与组合实际问题的基本原则(十六字方针):

分类相加,分步相乘;有序排列,无序组合.

(2) 解决排列与组合实际问题的数学思想:

分类讨论与转化化归.

(3) 排列与组合实际问题的 11 类常见经典题型:

① 元素个数少或规律性较强的计数问题;

② 投信或转化为投信的计数问题;

③ 排人或排数的计数问题;

④ 染色或转化为染色的计数问题;

⑤ 多面手的计数问题;

⑥ 含与不含的计数问题;

⑦ 至多或至少的计数问题;

⑧ 先选(组合)后排(排序)的计数问题;

⑨ 与几何有关的计数问题;

⑩ 分组分配的计数问题;

⑪ 元素相同的计数问题.

(4) 解决排列与组合实际问题的 8 种思路:

① 元素个数少或规律性较强问题——列举法;

② 相邻问题——捆绑法;

③ 相离问题——插空法;

④ 有序问题——缩倍法;

⑤ $\left\{ \begin{array}{l} \text{特殊元素,} \\ \text{特殊位置,} \\ \text{至多问题,} \\ \text{至少问题} \end{array} \right.$ ——分类或除杂法;

⑥ 混合问题——先组合后排序法;

⑦ “小集团”问题——先整体后局部法;

⑧ 元素相同的问题——隔板法.

基本题型

知识评价 素养形成

考点 1 相邻问题捆绑法

例 1 第 19 届亚运会于 2023 年 9 月 23 日至 10 月 8 日在杭州举行,本届亚运会的吉祥物是一组名为

“江南忆”的机器人,分别取名为“琮琮”“莲莲”和“宸宸”,它们分别代表世界遗产良渚古城遗址、西湖和京杭大运河.某同学买了 6 个不同的吉祥物,其中“琮琮”“莲莲”和“宸宸”各 2 个,现将这 6 个吉祥物排成一排,且名称相同的 2 个吉祥物相邻,则不同的排法种数为 ()

A. 48 B. 24 C. 12 D. 6

[方法技巧]

题目中规定相邻的几个元素捆绑成一个组,当作一个大元素参与排列.使用捆绑法,然后进行排列,简单计算可得结果.

【变式训练】

1. 3 名学生和 2 名老师站成一排合影,则 3 名学生相邻的排法共有 ()

A. 48 种 B. 36 种
C. 20 种 D. 24 种

2. 将 3 个 1 和 2 个 0 随机排成一行,则 2 个 0 相邻的排列方法有 ()

A. 3 种 B. 4 种 C. 5 种 D. 6 种

考点 2 相离问题插空法

例 2 电视台在电视剧开播前连续播放 6 个不同的广告,其中 4 个商业广告和 2 个公益广告,现要求 2 个公益广告不能连续播放,则不同的播放方式共有 ()

A. $A_4^4 A_5^2$ 种 B. $C_4^4 C_5^2$ 种
C. $A_6^4 A_7^2$ 种 D. $C_6^4 C_7^2$ 种

[方法技巧]

元素相离(即不相邻)问题,可先把无位置要求的几个元素全排列,再把规定的相离的几个元素插入上述几个元素所形成的空位.

【变式训练】

1. [2024·濮阳高二期末] 某博物馆新增包括 A, B 在内的 8 件文物,其中 5 件是清朝的,3 件是唐朝的,且 A, B 都是清朝的.现将这些文物摆成一排,要求 A, B 必须相邻,但唐朝的文物不得相邻,则所有不同的摆法种数为 ()

A. 1440 B. 2160
C. 2880 D. 3050

2. A, B, C, D, E, F 六人站成一排, 满足 A, B 相邻, C, D 不相邻的不同站法种数为_____.

考点3 元素分析法(位置分析法)

例3 [2024·江西上饶高二期中] 7个人站成两排, 前排3人, 后排4人, 其中甲、乙两人必须挨着站, 甲、丙两人必须分开站, 则不同的站法共有 ()

- A. 672种 B. 864种
C. 936种 D. 1056种

[方法技巧]

某个或几个元素要排在指定位置, 可先排这个或几个元素, 再排其他的元素.

【变式训练】

1. 6人排成一排照相, 其中甲、乙两人必须排在中间两个位置, 有_____种不同的排法.
2. 五位同学站成一排合影, 甲站在最右边, 乙、丙相邻, 则不同的站法种数为_____.

考点4 多排问题单排法

例4 6个不同的元素排成前后两排, 每排3个元素, 那么不同的排法种数是 ()
A. 36 B. 120 C. 720 D. 1440

[方法技巧]

把元素排成几排的问题可归结为一排考虑, 再分段处理.

【变式训练】

8个不同的元素排成前后两排, 每排4个元素, 其中某2个元素要排在前排, 某1个元素排在后排, 有多少种不同排法?

考点5 定序问题缩倍法(等几率法)

例5 A, B, C, D, E 五人并排站成一排, 如果 B 必须站在 A 的右边 (A, B 可以不相邻), 那么不同的排法种数为_____.

[方法技巧]

在排列问题中限制某几个元素必须保持一定的顺序, 可用缩小倍数的方法.

【变式训练】

1. 甲、乙、丙等6人排成一排, 且甲、乙均在丙的同一侧, 则不同的排法共有_____种. (用数字作答)
2. 有6位同学排成一排准备拍照, 拍照前加入了2位同学, 如果要求他们仍站成一排, 同时原来6位同学的相对顺序保持不变, 则共有_____种不同的站法.

考点6 标号排位问题(不配对问题)

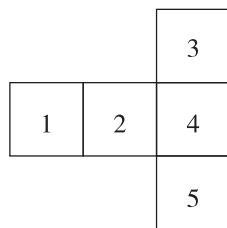
例6 将数字1, 2, 3, 4填入标号为1, 2, 3, 4的四个方格里, 每格填一个数, 则每个方格的标号与所填数字均不相同的填法有 ()
A. 6种 B. 9种 C. 11种 D. 23种

[方法技巧]

把元素排到指定位置上, 可先把某个元素按规定排入, 然后再排另一个元素, 如此继续下去, 依次即可完成.

【变式训练】

1. 四个人各写一张贺年卡, 先集中起来, 然后每人从中拿一张别人写的贺年卡, 则4张贺年卡不同的分配方式共有 ()
A. 6种 B. 9种 C. 11种 D. 23种
2. 编号为 A, B, C, D, E 的5个小球放在如图所示的5个盒子里, 要求每个盒子只能放1个小球, 且 A 球不能放在1, 2号盒子里, B 球必须放在与 A 球相邻的盒子中, 求不同放法的种数.



考点7 不同元素的分配问题(先分堆再分配)

例7 [2024·四川达州高二期中] 有5名大四学生报名参加公开招聘考试, 总共有三个岗位, 每人限报一个岗位, 若这三个岗位都至少有1人报考, 则这5名大四学生不同的报考方法种数为 ()
A. 144 B. 150
C. 196 D. 256

[方法技巧]

注意平均分堆的算法.

【变式训练】

1. 甲、乙、丙、丁四位同学分别去甘肃省、江西省、北京市三个地方调研,每个地方至少一个人去,且甲、乙两人不能去同一个地方,则不同的安排方式有_____种.

2. [2024·云南丽江高二期中] 现有6个孩子和3个不同的房间,让孩子都进入房间.

(1)若每个房间进2个孩子,共有多少种不同的安排方法?

(2)若恰有1个房间没有孩子,共有多少种不同的安排方法?

考点8 相同元素的分配问题(隔板法)

例8 把20个相同的球全部放入编号分别为1,2,3的三个盒子中,要求每个盒子中球的个数不小于其编号,有多少种不同的放法?

[方法技巧]

运用“隔板法”必须同时满足三个条件才可以:①题目中要分的元素没有任何差别,必须完全相同;②所分的元素要求全部分完,不许存在剩余的情况;③每个人都必须分到一个元素,不可以出现分不到的情况.

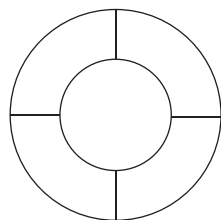
【变式训练】

1. [2024·江苏淮安高二期末] 关于 x, y, z 的方程 $x+y+z=13$ (其中 $x, y, z \in \mathbf{N}$,且 $x \geq 1, y \geq 2, z \geq 3$)的解共有_____组.(用数字作答)

2. 将除颜色外完全相同的4个白球、5个黑球、6个红球放入四个不同的盒子中,使得有一个空盒且其他盒子中球的颜色齐全的不同放法有多少种?

考点9 染色问题

例9 如图,花坛中有5个区域,现有4种不同颜色的花卉可供选择,要求相同颜色的花不能相邻栽种,则符合条件的种植方案有_____种.



[方法技巧]

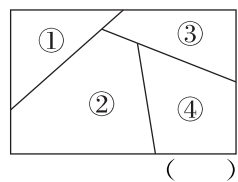
染色问题的常用方法有:(1)可根据共用了多少种颜色分类讨论;

(2)根据相对区域是否同色分类讨论;

(3)将空间问题平面化,转化成平面区域染色问题.

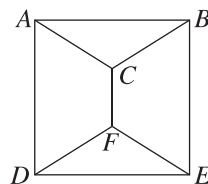
【变式训练】

1. 用4种不同颜色给如图所示的地图上着色,要求相邻两块涂不同的颜色,则不同的涂色方法共有



- A. 24种
- B. 36种
- C. 48种
- D. 72种

2. [2024·黑龙江哈尔滨高二期中] 如图,给A, B, C, D, E, F六个点涂色,现有五种不同的颜色可供选用,要求每个点涂一种颜色,且每条线段的两个端点涂不同的颜色,则不同的涂色方法共有



- A. 1440种
- B. 1920种
- C. 2160种
- D. 3360种